PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE

I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio

22 novembre 2012

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	E
2	D
3	B
4	B
5	A
6	A
7	C
8	D

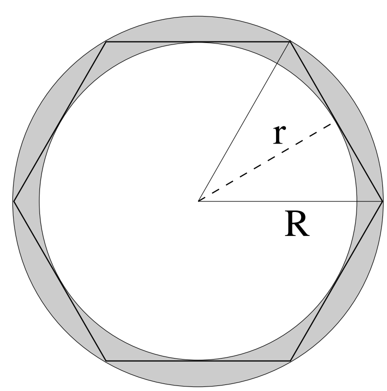
Problema	Risposta corretta
9	D
10	B
11	B
12	C
13	E
14	D
15	B
16	B

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(E)**.
   Poiché Loretta si reca all'ambulatorio ogni 13 giorni e Franco ogni 7 giorni, si rincontreranno all'ambulatorio tra un numero di giorni che sia multiplo sia di 13 che di 7; il più piccolo di questi numeri è il minimo comune multiplo di 13 e 7 ovvero 91.
   [Problema proposto da A. Colesanti]

2. La risposta è **(D)**.
   Indichiamo con L la lunghezza dei due cateti del triangolo che rappresenta il cortile della casa di Luigi. Abbiamo $\frac{L^2}{2} = 16$ m^2 e dunque $L = 4\sqrt{2}$ m. La lunghezza dell'ipotenusa è data da $\sqrt{2}\ L$ ovvero 8 m.
   [Problema proposto da S. Monica]

3. La risposta è **(B)**.
   Occorre calcolare il raggio del cerchio inscritto e il raggio del cerchio circoscritto all'esagono. Il raggio R del cerchio circoscritto è uguale al lato dell'esagono, ovvero misura 2 m. Il raggio r del cerchio inscritto è dato dalla misura dell'altezza di un triangolo equilatero di lato 2 m (vedi figura) e quindi misura $\sqrt{3}$ m. Allora l'area del cerchio circoscritto è $4\ \pi$ m^2 e l'area del cerchio inscritto è $3\ \pi$ m^2, e la differenza tra queste, ovvero l'area richiesta, è π m^2.

   [Problema proposto da U. Bindini]

4. La risposta è **(B)**. Chiamiamo gli undici numeri $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$. Sappiamo che
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{11}}{11} = 4850\,.$$
Possiamo allora calcolare
$$\begin{aligned}\frac{(a_1 - 10) + (a_2 - 10) + \cdots + (a_{11} - 10)}{11} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} - 110}{11}\\ &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{11}}{11} - \frac{110}{11}\\ &= 4850 - 10 = 4840\,.\end{aligned}$$
[Problema proposto da P. Negrini]

5. La risposta è **(A)**.
Indichiamo con X e Y le misure (in una data unità di misura) della base e della altezza del rettangolo, rispettivamente, e con A e B le rispettive misure dei segmenti a e b. Sappiamo che $A + B = Y$ e
$$\frac{\frac{1}{2}\,(B + Y)\cdot X}{\frac{1}{2}\,A \cdot X} = 4\,,$$
e quindi
$$4 = \frac{A + 2B}{A} = 1 + 2\,\frac{B}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{A} = \frac{3}{2}$$
ovvero $\dfrac{A}{B} = \dfrac{2}{3}$
[Problema proposto da F. Mugelli]

6. La risposta è **(A)**.
Indichiamo con a, b e c le cifre di un numero di tre cifre abc tale che, comunque si permutino le sue cifre, risulti divisibile per 4. Se un numero è multiplo di 4, esso è in particolare pari, quindi a, b e c devono essere tutti pari, perché ciascuno di loro, a meno di una permutazione, è la cifra delle unità di un numero pari. Inoltre osserviamo che i numeri divisibili per quattro che hanno come cifra delle unità 2 o 6 hanno per cifra delle decine un numero dispari. Dunque nessuno dei numeri a, b e c può essere 2 oppure 6. Le uniche possibilità sono allora che ciascuno dei 3 numeri a, b e c coincida con 4 oppure con 8. Abbiamo allora gli 8 numeri di 3 cifre:
$$444\,,\quad 448\,,\quad 484\,,\quad 488\,,\quad 844\,,\quad 848\,,\quad 884\,,\quad 888$$
che hanno la proprietà richiesta e sono gli unici ad averla.
[Problema proposto da S. Mongodi.]

7. La risposta è **(C)**.
Il numero di amici di Marco deve essere un divisore di 1260, e quindi il massimo numero di amici che Marco può avere è il più grande divisore di 1260 che sia anche più piccolo di 100. La scomposizione in fattori primi di 1260 è
$$1260 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7\,,$$
e mostra che $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ è un divisore di 1260 e nessun altro numero compreso tra 90 e 100 lo è. Dunque 90 è il più grande divisore di 1260 che sia anche minore di 100.
[Problema proposto da G. Barbarino.]

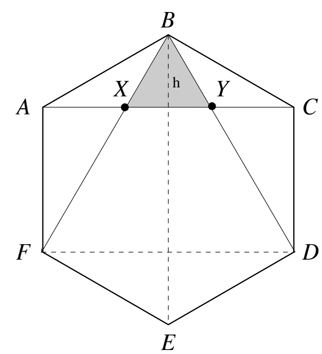
8. La risposta è **(D)**.
Consideriamo una mattonella esagonale M del pavimento, che sia circondata da sei mattonelle esagonali e supponiamo di colorare questa mattonella di blu. A questo punto nessuna delle sei mattonelle che la circondano può essere colorata di blu e due di esse che siano adiacenti devono avere colori diversi, ovvero rosso e nero. Quindi fissato il colore di M ci sono due possibili modi di colorare le sei mattonelle ad essa adiacenti. Poiché ci sono 3 possibili colorazioni per M, e per ciascuna di esse ci sono due colorazioni delle mattonelle adiacenti, ci sono 6 modi distinti di colorare M e le 6 mattonelle adiacenti, in modo che le richieste del problema siano soddisfatte. Osserviamo poi che fissato il colore della mattonella M e di quelle ad essa adiacenti, la colorazione del resto del pavimento è univocamente determinata. Quindi ci sono 6 modi di colorare il pavimento.
[Problema proposto da K. Kuzmin.]

9. La risposta è **(D)**.
Indichiamo con F_b e F_c le percentuali di femmine bionde e castane rispettivamente, e con M_b e M_c le percentuali di maschi biondi e castani rispettivamente. Sappiamo che $F_b + M_b = 40$ e $F_b + F_c = M_b + M_c = 50$. Le femmine bionde sono il 75% del totale degli alunni biondi e quindi i maschi biondi sono il 25% del totale degli alunni biondi, quindi $F_b = 3M_b$. Allora troviamo, dalla prima delle due uguaglianze scritte in precedenza, $M_b = 10$, e quindi da $M_b + M_c = 50$ abbiamo $M_c = 40$.
[Problema proposto da S. Monica.]

10. La risposta è **(B)**.
Facendo riferimento alla figura, consideriamo il triangolo BXY. Questo è equilatero e possiamo calcolare la sua altezza h come

$$h = \frac{(BE - CD)}{2} = \frac{1}{2}\ \mathrm{m}\,.$$

Quindi XY è il lato di un triangolo equilatero di altezza 1/2 m. Da questo si ottiene $XY = \frac{2}{\sqrt{3}}\,h = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \mathrm{m} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{m}$.



[Problema proposto da S. Mongodi]

11. La risposta è **(B)**.
Rappresentiamo una generica disposizione di 6 frutti con una sequenza di 6 lettere, ciascuna delle quali può essere una P (pera) o una M (mela). Vogliamo contare le sequenze in cui tra due M non ci sia nessuna P; per comodità chiamiamo queste sequenze *accettabili*. Come regola generale, una sequenza è accettabile se tutte le M in essa contenute sono adiacenti l'una all'altra, cioè consecutive; questa osservazione rende più facile contare le sequenze accettabili perché in una sequenza accettabile la posizione delle M è univocamente determinata una volta che si sia individuata la *prima* M (quella più a sinistra) e il numero complessivo di M presenti nella sequenza. Utilizzando questo fatto scriviamo allora le possibili sequenze in base al numero di M che esse contengono, partendo dal valore massimo in cui ci sono 6 M (ovvero i 6 frutti sono tutte mele), fino a quello minimo in cui non c'è nessuna M:

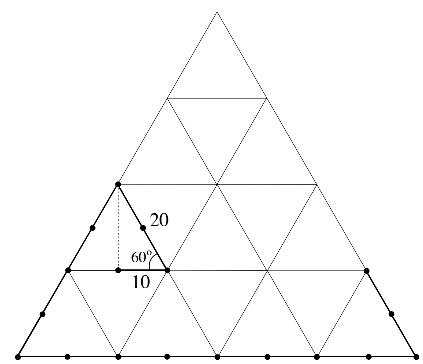
- se ci sono 6 M si ha 1 sequenza accettabile:
$$MMMMMM\,.$$
- se ci sono 5 M si hanno 2 sequenze accettabili:
$$MMMMMP\,,\quad PMMMMM\,.$$

- se ci sono 4 M si hanno 3 sequenze accettabili:
$$MMMMPP\,, \quad PMMMMP\,, \quad PPMMMM\,.$$
- se ci sono 3 M si hanno 4 sequenze accettabili:
$$MMMPPP\,, PMMMPP\,, PPMMMP\,, \, PPPMMM\,.$$
- se ci sono 2 M si hanno 5 sequenze accettabili:
$$MMPPPP\,, PMMPPP\,, PPMMPP\,, PPPMMP\,, PPPPMM\,.$$
- se c'è una sola M si hanno 6 sequenze accettabili:
$$MPPPPP\,, PMPPPP\,, PPMPPP\,, PPPMPP\,, PPPPMP\,, PPPPPM\,.$$
- infine, l'unica sequenza senza M è accettabile:
$$PPPPPP\,.$$

In tutto abbiamo allora $1+2+3+4+5+6+1 = 22$ sequenze accettabili.
[Problema proposto da P. Leonetti.]

12. La risposta è **(C)**.
Infatti (poiché $b > 0$ e $d > 0$) la disequazione **C** è equivalente a $d(a+c) \leq c(b+d)$, che equivale a sua volta a $ad \leq bc$, ovvero $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$. Le altre risposte sono tutte errate. Prendendo $a = b = c = d = 1$, si otterrebbe infatti $1 \geq 2$ dalla **A**, e $1 > 1$ dalla **D**, disuguaglianze evidentemente false. Prendendo invece $a = c = 1$ e $b = d = 2$, la **B** fornirebbe $\frac{1}{2} \geq 1$, assurdo.
[Problema proposto da P. Leonetti.]

13. La risposta è **(E)**.
La cavalletta percorre la spezzata evidenziata in figura, costruita sui lati di triangoli equilateri tra loro adiacenti, in cui i punti rappresentano la posizione in cui essa si trova all'inizio e dopo ogni salto. Ne segue che dopo 17 salti la cavaletta si trova precisamente a $5 \cdot 10$ cm di distanza dal punto iniziale.



[Problema proposto da S. Monica.]

14. La risposta è **(D)**.
Indichiamo con B il prezzo della benzina oggi, e con P ed O rispettivamente il costo del prodotto e il costo del petrolio, sempre riferiti ad oggi. Sappiamo che
$$P = \frac{35}{100}\,B \quad \text{e} \quad O = \frac{24}{100}\,P$$
quindi
$$O = \frac{24 \cdot 35}{100 \cdot 100}\,B = \frac{8,4}{100}\,B\,.$$
Di conseguenza oggi il costo del petrolio costituisce l' 8,4% del prezzo della benzina. Se il costo del petrolio aumenta del 10% (ovvero di un decimo) e tutti gli altri costi rimangono invariati, il prezzo della benzina aumenterà di un decimo dell'8,4%, ovvero dello 0,84%.
[Problema proposto da C. Di Stefano.]

15. La risposta è **(B)**.
Ognuna delle quaranta carte, ad ogni estrazione, ha la stessa probabilità di ogni altra di essere estratta dal mazzo, e questa probabilità è $1/40$. In particolare, alla seconda estrazione, la carta che era stata estratta la prima volta, essendo stata rimessa nel mazzo, ha la stessa probabilità di essere estratta che aveva alla prima estrazione, cioè $1/40$.
[Problema proposto da P. Negrini.]

16. La risposta è **(B)**.
L'area di AHC è data da $(AH \cdot CH)/2$ mentre l'area di ABC è data da $(AB \cdot CH)/2$. Quindi il rapporto tra l'area di AHC e quella di ABC vale $\frac{AH}{AB}$; allora dal problema sappiamo che

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{2\ AB}$$

e da questa uguaglianza si ottiene $AC = 2\ AH$; questo implica che l'angolo $\widehat{CAB}$ misura $60°$.
[Problema proposto da S. Mongodi]