PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede -- Soluzioni triennio

21 novembre 2007

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	C
2	C
3	C
4	D
5	E
6	C
7	D
8	D
9	C
10	E
11	C
12	A
13	B

Problema	Risposta corretta
14	C
15	D
16	D
17	D
18	C
19	A
20	C
21	D
22	C
23	C
24	B
25	C

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(C)**.
   Calcoliamo quante migliaia di Euro guadagna il calciatore in un'ora:
   $$\frac{6.000.000}{1000 \cdot 365 \cdot 24} = \frac{6.000}{365 \cdot 24} = \frac{600}{73 \cdot 12} = \frac{50}{73}\,.$$
   Questo numero è strettamente maggiore di $\frac{1}{2}$ e strettamente minore di 1. Quindi in un'ora il guadagno del calciatore è strettamente maggiore di 500 Euro e strettamente minore di 1000 Euro. Per guadagnare 1000 Euro occorre quindi un tempo compreso tra una e due ore.

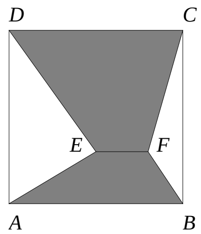
2. La risposta è **(C)**.
   Indichiamo con p il valore comune del perimetro. I lati l_3 ed l_4 del triangolo equilatero e del quadrato valgono rispettivamente $p/3$ e $p/4$. Di conseguenza, $\frac{l_4}{l_3} = \frac{p/4}{p/3} = \frac{3}{4}$.

3. La risposta è **(C)**.
   Sia x il numero dei supplementi venduti. L'incasso dovuto alla vendita dei supplementi è dato da $1,50\,x$ Euro mentre quello dovuto alla vendita dei giornali è di $333 \cdot 0,90$ Euro $= 299,70$ Euro. Di conseguenza, $1,50\,x + 299,70 = 539,70$, da cui $x = 160$. Il numero di supplementi venduti è compreso tra 133 e 199 copie.

4. La risposta è **(D)**.
Il prodotto di a e b è negativo e di conseguenza a e b hanno segno opposto; per semplicità supponiamo che a sia positivo e b negativo. Da $a+b>0$ segue $|a|=a>-b=|b|$ quindi il numero positivo ha valore assoluto (che concide con il numero stesso) maggiore del valore assoluto del numero negativo. Alla stessa conclusione si arriva supponendo che a sia negativo e b sia positivo.

5. La risposta è **(E)**.
$\sqrt[3]{54}+\sqrt[6]{4}=\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{27}+1)=4\sqrt[3]{2}$.

6. La risposta è **(C)**.
L'area dell'esagono in questione si può ottenere per differenza tra l'area del quadrato $ABCD$ e quella dei triangoli AED e BCF.



Siano EH e FK le altezze dei triangoli AED e BCF uscenti dai vertici E ed F. Si ha:

$$\begin{aligned} A_{ABFCDE} &= A_{ABCD} - A_{AED} - A_{BCF} = A_{ABCD} - \frac{1}{2}\overline{AB}\,(\overline{EH}+\overline{FK}) = \\ &= A_{ABCD} - \frac{1}{2}\overline{AB}\,(\overline{AB}-\overline{EF}) = 9\,\mathrm{m}^2 - 3\,\mathrm{m}^2 = 6\,\mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

Si osservi inoltre che il valore dell'area dell'esagono non cambia traslando orizzontalmente la posizione del segmento EF. Traslando in modo che il punto F si trovi sul lato CD i calcoli risultano semplificati.

7. La risposta è **(D)**.
Paolo ha percorso 13 chilometri in 78 minuti, dinque la sua velocità (costante) è di $\frac{13000}{78}$ metri al minuto. La strada che ha percorso in 51 minuti è:

$$\frac{13000}{78}\cdot 51\,\mathrm{m} = 1000\cdot\frac{51}{6}\,\mathrm{m} = 1000\cdot\frac{17}{2}\,\mathrm{m} = 8500\,\mathrm{m}.$$

Di conseguenza, quando il vincitore ha tagliato il traguardo Paolo si trovava a $(13000-8500)\,\mathrm{m} = 4500$ m dal traguardo.

8. La risposta è **(D)**.
Raccogliendo a fattor comune e semplificando:

$$\frac{2^{101}+2^{93}}{2^{86}+2^{78}} = \frac{2^{93}(2^8+1)}{2^{78}(2^8+1)} = 2^{93-78} = 2^{15}.$$

9. La risposta è **(C)**.
Sul pianeta Uru un anno è composto da $34\cdot 14 = 476$ giorni. La prossima Festa del Pianeta cadrà quando saranno trascorse un numero intero di settimane da oggi e sarà ancora il primo giorno dell'anno. Ovvero quando sarà trascorso un numero di giorni multiplo sia di 476 (durata di un anno) che di 8 (durata di una settimana). Il più piccolo numero di giorni per cui questo è vero è il minimo comune multiplo tra 476 e 8, cioè 952.

10. La risposta è **(E)**.
Il triangolo AED è simile al triangolo ABC. Il rapporto tra le lunghezze dei lati di AED e dei lati corrispondenti di ABC è $1/3$ quindi $A_{ABC} = 9\,A_{AED}$. Segue $A_{BCED} = A_{ABC} - A_{AED} = 8\,A_{AED} = 40\,\mathrm{m}^2$

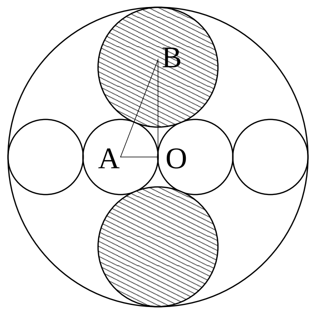
11. La risposta è **(C)**.
Se Dario fosse un cavaliere per quanto egli afferma anche Bernardo sarebbe un cavaliere, ma l'affermazione di Bernardo non è compatibile con quella di Dario. Dunque Dario è un brigante. L'affermazione di Carlo allora è vera, quindi Carlo è un cavaliere. L'affermazione di Bernardo non è compatibile con quella di Carlo quindi Bernardo è un brigante. Infine Arturo afferma il vero e quindi è un cavaliere. Tra i quattro ci sono esattamente due cavalieri.

12. La risposta è **(A)**.
Siano x il peso in grammi di un tubetto di dentifricio e p il prezzo del dentifricio al grammo prima della riduzione. Il prezzo di un tubetto prima della riduzione è dato da xp e dopo la riduzione è dato da $(x-20)(1+0,25)p$. Si ha quindi: $xp = (x-20)(1+0,25)p$, da cui $x = 100$ grammi.

13. La risposta è **(B)**.
Il numero $10\,(2007)^4 - 8\,(2007)^3 + 12\,(2007)^2 + 721$ è positivo, infatti $10\,(2007)^4$ è certamente maggiore di $8\,(2007)^3$. Inoltre $2007 = 3 \cdot 669$ e quindi ciascuno dei primi tre addendi è un multiplo di 669. Il resto della divisione è dunque uguale al resto della divisione di 721 per 669, ovvero vale 52.

14. La risposta è **(C)**.

Indichiamo con R il raggio da determinare e con r il raggio dei quattro cerchi allineati lungo il diametro del cerchio grande. Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo AOB si ha: $\overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2$, cioè $r^2+(4r-R)^2 = (R+r)^2$, da cui si ricava $R = \dfrac{8}{5}\,r$. Infine, poiché r è un quarto del raggio del cerchio grande, cioè $r = 5$ cm, si deduce che R è 8 cm.

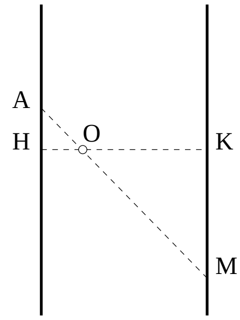


15. La risposta è **(D)**.
Immaginiamo che il professor Victor compili il foglio delle presenze scrivendo nella casella di ciascuno studente "1" in caso di presenza e "0" in caso di assenza. Questo mostra che il problema è equivalente a contare tutte le possibili sequenze ordinate (distinte) di dieci elementi, formate da 0 e 1. Il numero di queste sequenze è dato dal prodotto del numero dei possibili valori del primo elemento per il numero dei possibili valori del secondo elemento e così via fino al numero dei possibili valori del decimo elemento, ovvero da 2 moltiplicato per se stesso 10 volte, ovvero da 2^{10}.

Alternativamente, per chi ha familiarità con la rappresentazione binaria dei numeri, questo equivale a contare i numeri naturali distinti che si possono rappresentare con 10 cifre in base due. Sono rappresentabili tutti i numeri da 0 a $1111111111_2 = 2^{10} - 1$, ovvero 2^{10} numeri.

16. La risposta è **(D)**.

Indichiamo con A e con M le posizioni in cui si trovano Andrea e Marco in un dato istante. Sia O la posizione del palo. Nel tempo in cui Andrea percorre il tratto AH Marco percorre il tratto MK. I triangoli AOH e MOK sono simili e $\overline{OK} = 3\,\overline{OH}$. Quindi $\overline{MK} = 3\,\overline{AH}$. Quindi nello stesso intervallo di tempo Marco percorre una distanza tripla di quella percorsa da Andrea; la sua velocità sarà quindi il triplo di quella di Andrea ovvero sarà di 18 km/h.



17. La risposta è **(D)**.
Utilizziamo i prodotti notevoli per scomporre $371^4 - 41^4$: $371^4 - 41^4 = (371^2 + 41^2)(371 + 41)(371 - 41) = (371^2 + 41^2)(371 + 41) \cdot 330$. Si vede facilmente che $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ quindi almeno quattro dei numeri proposti sono divisori di $371^4 - 41^4$. Resta da verificare se anche 7 è un divisore di $371^4 - 41^4$. Osserviamo che $371 = 53 \cdot 7$ quindi sia $(371^2 + 41^2)$ che $(371 + 41)$ sono divisibili per 7 se e solo se 41 è divisibile per 7, il che non è vero. Quindi soltanto quattro dei numeri proposti dividono $371^4 - 41^4$.

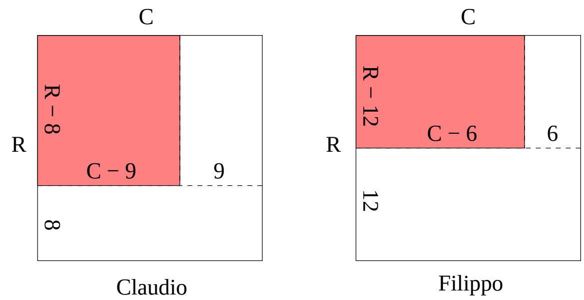
18. La risposta è **(C)**.
L'area del rombo bianco è quattro volte l'area del triangolo rettangolo. L'area del quadrato $ABCD$ è uguale all'area del quadrato bianco più quattro volte l'area del triagolo rettangolo, cioè è uguale alla somma dell'area del quadrato bianco e del rombo bianco e quindi vale $17+8 = 25\,\mathrm{m}^2$.

19. La risposta è **(A)**.

Secondo la disposizione di Claudio la zona occupata dalle pedine è equivalente a un rettangolo di $R-8$ righe per $C-9$ colonne; per equivalente intendiamo a meno di traslazioni orizzontali (cioè sulla stessa riga) delle pedine. Secondo la disposizione di Filippo, lo stesso numero P di pedine è equivalente a un rettangolo di $R-12$ righe per $C-6$ colonne. Quindi

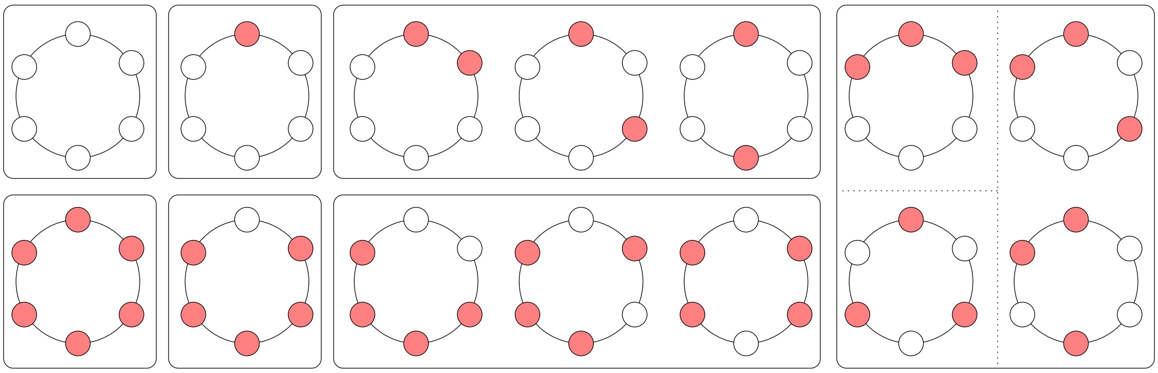
$$P = (R-8)(C-9) = (R-12)(C-6)$$

da cui $3R = 4C$ e $C/R = 3/4$.



20. La risposta è **(C)**.
Classifichiamo le possibili configurazioni in base al numero di piatti neri che ne fanno parte:
0 piatti neri: i piatti sono tutti bianchi quindi è possibile una sola configurazione.
1 piatto nero: ci sono 6 posizioni possibili per il piatto nero ma danno luogo a situazioni equivalenti a meno di una rotazione. Anche in questo caso contiamo soltanto una configurazione possibile.
2 piatti neri: l'unico elemento distintivo tra due configurazioni con 2 piatti neri è la posizione reciproca dei due piatti. Ci sono infatti 3 possibilità: possono essere adiacenti oppure avere uno o due piatti bianchi tra di loro. Non ci sono altre configurazioni possibili; infatti se tra il primo ed il secondo piatto nero troviamo 3 (o 4) piatti bianchi, proseguendo ancora ritroveremo il primo piatto nero dopo soltanto 1 (o 0) piatti bianchi, ovvero ricadiamo in situazioni già considerate. Con 2 piatti neri si contano quindi tre configurazioni distinte.

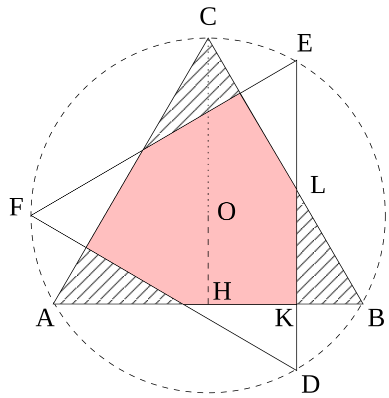
3 piatti neri: i tre piatti neri possono occupare 3 posizioni consecutive oppure possono essere alternati a piatti bianchi. Va prestata attenzione al caso in cui 2 piatti neri (ma non 3) occupano posizioni consecutive: per il terzo piatto esistono infatti 2 possibilità che portano a situazioni speculari ma non identificabili mediante rotazioni. Con 3 piatti neri si hanno in tutto quattro configurazioni distinte.
4, 5 o 6 piatti neri: sono situazioni rispettivamente equivalenti a quelle già esaminate nel caso di 2, 1 o nessun piatto nero. Infatti si possono ottenere da queste semplicemente scambiando il colore dei piatti. Danno luogo rispettivamente a 3, 1, 1 configurazioni distinte.
Complessivamente si sono contate $1+1+3+4+3+1+1 = 14$ configurazioni non equivalenti.



21. La risposta è **(D)**.
13^7 è intero quindi $13^7/10^5$ ha soltanto 5 cifre decimali diverse da zero. La sesta cifra decimale della frazione coincide quindi con la sesta cifra decimale di $\sqrt{3}/10^5$, ovvero con la prima cifra decimale di $\sqrt{3} = 1,73\ldots$, cioè 7.

22. La risposta è **(C)**.
In base alla prima affermazione di Francesco se si è in pochi si studia necessariamente bene e quindi le due cose: **studiare male** e **essere in pochi** sono incompatibili. Allora se la prima di queste due cose risulta verificata, non può esserlo la seconda. Esaminiamo le altre affermazioni: **A** e **D** non sono necessariamente vere perché la seconda affermazione di Francesco non esclude che si mangi poco in ogni caso. **B** ed **E** non sono necessariamente vere: la prima affermazione di Francesco non esclude che si possa studiare bene in ogni caso.

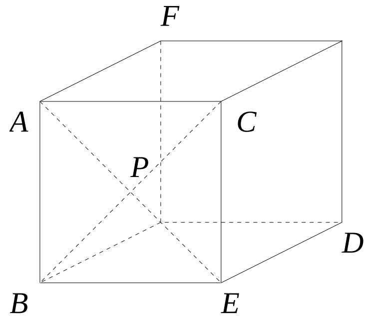
23. La risposta è **(C)**.
I due triangoli in questione sono inscritti in una stessa circonferenza. Indichiamo con r il raggio e con O il centro di tale circonferenza. L'area della loro intersezione è pari all'area del triangolo ABC meno tre volte l'area di BLK. Quest'ultima è data da $\overline{BK} \cdot \overline{KL} = \overline{BK}^2 \sqrt{3}$ dato che il triangolo BLK è simile a BCH. Poiché ABC è inscritto in una circonferenza di raggio r, $\overline{CH} = \frac{3}{2}r$, $\overline{OH} = \overline{HK} = \frac{r}{2}$, $\overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, $A_{ABC} = \overline{BH} \cdot \overline{CH} = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$, da cui $\overline{BK} = \overline{BH} - \overline{HK} = (\sqrt{3}-1)\frac{r}{2}$. Quindi $A_{BLK} = (\sqrt{3}-1)^2\frac{\sqrt{3}}{8}r^2$ e



$$\frac{3A_{BLK}}{A_{ABC}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}r^2(\sqrt{3}-1)^2}{\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

Di conseguenza l'area dell'intersezione è il $100(1-(2-\sqrt{3}))\%$, ovvero il $100(\sqrt{3}-1)\%$, dell'area del triangolo ABC. Poiché $\sqrt{3}-1$ è compreso tra $0,7$ e $0,8$, l'area considerata è compresa tra il 70 % e l'80 % dell'area del triangolo ABC.

24. La risposta è **(B)**.



Il piano in questione contiene il segmento AP, di conseguenza contiene anche il suo prolungamento AE, ovvero coindice con il piano che contiene il triangolo ADE, ovvero contiene il quadrilatero $AEDF$ e quindi divide il cubo in due parti uguali.

25. La risposta è **(C)**.
Rappresentiamo ogni possibile gruppo di alunni con cui esce Antonio con una sequenza ordinata di otto caratteri ciascuno scelto tra "0" e "1", utilizzando "1" se l'alunno fa parte del gruppo, "0" se non ne fa parte. Ad esempio, con "00001011" indicheremo il gruppo formato da Antonio e dagli alunni 1,2,4. I gruppi possibili sono 2^8 e Antonio guadagnerà 1 euro per ogni carattere "1" presente in ciascuna delle 2^8 possibili rappresentazioni.

I caratteri "1" si possono contare facilmente nel modo seguente: scriviamo la lista delle possibili sequenze ordinandole in senso crescente. Questo vuol dire vedere una sequenza come un numero (ad esempio 00000001 è il numero 1, mentre 00000101 è il numero 101) e scrivere le sequenze dalla più piccola, che è 00000000 alla più grande 11111111. A fianco riportiamo di nuovo la stessa lista in ordine inverso:

00000000	11111111
00000001	11111110
00000010	11111101
⋮	⋮
11111101	00000010
11111110	00000001
11111111	00000000

Si nota che in ciascuna riga ci sono esattamente 8 "1". Il numero totale di "1" che abbiamo scritto è dunque 8 volte il numero di righe: $8 \cdot 2^8 = 2^{11}$ ed è esattamente il doppio del valore cercato, dato che abbiamo scritto 2 volte la lista. Antonio guadagnerà quindi 2^{10} euro.