Associazione per l'Insegnamento della Fisica

Progetto Olimpiadi

OLIMPIADI DI FISICA

Senigallia – 18 Aprile 2007

Gara Nazionale: SOLUZIONE della Prova Teorica

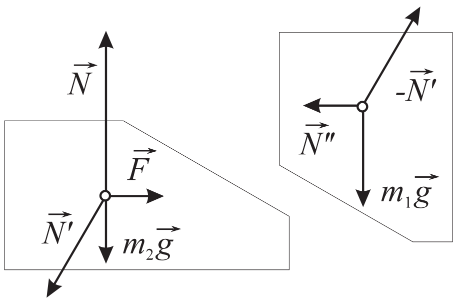
PROBLEMA n. 1 – Equilibrismi. . .

100 Punti

Quesito n. 1.

In assenza di attriti, le forze applicate al blocco di massa m_2 sono: il peso (verticale), la reazione vincolare $\vec{N}$ dal piano orizzontale (verticale), la reazione vincolare $\vec{N}'$ da parte del blocco di massa m_1 (obliqua) e la forza $\vec{F}$ (orizzontale).

Le forze applicate al blocco di massa m_1 sono: il peso (verticale), la reazione vincolare $\vec{N}''$ dal piano verticale (orizzontale), la reazione vincolare $-\vec{N}'$ da parte del blocco di massa m_2 (obliqua).



Quesito n. 2.

All'equilibrio le forze su ciascun blocco devono avere risultante nulla. In componenti, prendendo l'asse x orizzontale da sinistra a destra e l'asse y verticale dal basso verso l'alto, e indicando con F_0 l'intensità di $\vec{F}$ in condizioni di equilibrio, si ha:

$$F_0 - N' \operatorname{sen}\theta = 0$$
$$N - m_2 g - N' \cos\theta = 0$$
$$N' \operatorname{sen}\theta - N'' = 0$$
$$N' \cos\theta - m_1 g = 0$$

Dalla prima e la quarta di queste equazioni, con facili sostituzioni, si ha

$$N' = \frac{m_1\, g}{\cos\theta} \qquad F_0 = m_1\, g\, \tan\theta = 28.3\,\mathrm{N}$$

Quesito n. 3.

Con una forza maggiore, pari a $2F_0$, non si ha più equilibrio; il corpo di massa m_2 si muove con accelerazione a_2 orizzontale e il corpo di massa m_1 si muove con accelerazione a_1 verticale. Le equazioni precedenti, pertanto, si modificano così:

$$2F_0 - N' \operatorname{sen}\theta = m_2\, a_2$$
$$N - m_2 g - N' \cos\theta = 0$$
$$N' \operatorname{sen}\theta - N'' = 0$$
$$N' \cos\theta - m_1 g = m_1\, a_1$$

Inoltre, per considerazioni geometriche, fra gli spostamenti, e quindi le accelerazioni, dei due blocchi vale la relazione $a_1 : a_2 = \operatorname{sen}\theta : \cos\theta$, cioè $a_2 = a_1/\tan\theta$. Sostituendo nella prima e quarta equazione qui sopra, si ricava:

$$N' = \frac{2F_0}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{m_2\, a_1}{\operatorname{sen}\theta\, \tan\theta} = \frac{2m_1\, g}{\cos\theta} - \frac{m_2\, a_1}{\operatorname{sen}\theta\, \tan\theta}$$

$$a_1 = \frac{N'\, \cos\theta}{m_1} - g = g - \frac{m_2\, a_1}{m_1\, \tan^2\theta}$$

$$a_1 = g\frac{m_1\, \tan^2\theta}{m_1\, \tan^2\theta + m_2} = 3.50\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Quesito n. 4.

Il blocco di massa m_2 ha un'accelerazione $a_2 = a_1/\tan\theta$ e pertanto, a partire dall'istante $t = 0$ in cui la forza $\vec{F}$ raddoppia l'intensità, ha una velocità $v = a_2\, t$. La potenza da applicare, pertanto, è $W = 2F_0\, v = 2m_1\, g\, a_1\, t$. Essa cresce linearmente nel tempo con un coefficiente $2m_1\, g\, a_1 = 344\,\mathrm{W\,s^{-1}}$.

Nota: Sostituendo ad a_1 il valore già arrotondato, così come è stato riportato sopra al punto 3, si otterrebbe $W/t = 343\,\mathrm{W\,s^{-1}}$ che è ugualmente accettabile.

Quesito n. 5.

In presenza di forze di attrito, $\vec{A}$ e $\vec{A}''$ (rispettivamente), sulle superfici orizzontale e verticale che si aggiungono alle altre forze già considerate, la forza F minima per ottenere l'equilibrio dev'essere minore di F_0, per cui l'attrito orizzontale dev'essere rivolto nel verso positivo delle x per ostacolare il moto del blocco di massa m_2 verso sinistra, e quello verticale verso l'alto per ostacolare il moto del blocco di massa m_1 verso il basso, moti che si avrebbero in assenza di $\vec{F}$ e di attriti.

Quindi le equazioni precedenti si modificano così:

$$F + A - N'\, \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$N - m_2 g - N'\, \cos\theta = 0$$

$$N'\, \operatorname{sen}\theta - N'' = 0$$

$$N'\, \cos\theta + A'' - m_1 g = 0$$

I valori massimi possibili di A e A'' sono rispettivamente $A = \mu N$ e $A'' = \mu N''$. Indichiamo i loro valori effettivi con $A = \rho N$ e $A'' = \rho'' N''$. Questa volta servono tutte e quattro le equazioni precedenti; si ricava

$$N'' = N'\, \operatorname{sen}\theta$$

$$N'\, \cos\theta + \rho'' N'\, \operatorname{sen}\theta - m_1\, g = 0 \quad \Rightarrow \quad N' = \frac{m_1\, g}{\cos\theta + \rho''\, \operatorname{sen}\theta}$$

$$N = \left(\frac{m_1\, \cos\theta}{\cos\theta + \rho''\, \operatorname{sen}\theta} + m_2\right) g$$

$$F = \frac{m_1\, \operatorname{sen}\theta - \rho(m_1 + m_2)\cos\theta - \rho\rho''\, m_2\, \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \rho''\, \operatorname{sen}\theta}\, g$$

Il valore di F decresce in modo monotono al crescere sia di ρ che di ρ'', per cui per minimizzare F (finché esso è positivo, naturalmente) occorre assumere i valori massimi possibili sia di ρ che di ρ''. L'ultima formula diviene pertanto:

$$F_{\min} = \frac{m_1\, \operatorname{sen}\theta - \mu(m_1 + m_2)\cos\theta - \mu^2\, m_2\, \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \mu\, \operatorname{sen}\theta}\, g = 10.7\,\mathrm{N}$$

PROBLEMA n. 2 – Occhio alle induttanze!

50 Punti

Quesito n. 1.

Alla chiusura dell'interruttore la corrente per l'induttanza si mantiene istantaneamente nulla e l'equazione della maglia attiva dà

$$3RI_0 = \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = 3\,(2.5\,\mathrm{k}\,\Omega)\,(5\,\mathrm{mA}) = 37.5\,\mathrm{V}$$

A regime invece la f.e.m. ai capi dell'induttanza è nulla, dunque la resistenza vista dal generatore è $R^\star = R + (R_2 \parallel R_1)$, per cui l'equazione del circuito equivalente dà

$$R^\star I_1 = \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \left(R + \frac{2R\,R_1}{2R+R_1}\right) I_1 = \frac{2R^2 + 3RR_1}{2R+R_1}\, I_1 = \frac{2R+3R_1}{2R+R_1}\, RI_1 = \mathcal{E}$$

che, sostituendo l'espressione precedente di $\mathcal{E}$, si riduce a

$$(2R+3R_1)I_1 = 3\,(2R+R_1)I_0 \quad \Rightarrow \quad 3\,(I_1 - I_0)\,R_1 = 2\,(3I_0 - I_1)\,R$$

da cui

$$R_1 = \frac{2\,(3I_0 - I_1)}{3\,(I_1 - I_0)}\,R = \frac{2\,(15-9)\,\mathrm{mA}}{3\,(9-5)\,\mathrm{mA}}\,R = R = 2.5\,\mathrm{k}\,\Omega$$

Quesito n. 2.

L'energia magnetica immagazzinata nel circuito è $U_L = {}^1\!/_2\, LI_L^2$, essendo I_L la corrente nel ramo dell'induttanza. A regime la d.d.p. ai capi dell'induttanza è nulla e dunque basta considerare il parallelo delle resistenze $R_1 = R$ ed $R_2 = 2R$: ne segue immediatamente che la corrente in R_1 è doppia dell'altra e pari a 2/3 della corrente totale.

Più formalmente tale corrente è determinata dalle equazioni (dette del *partitore di corrente*):

$$\begin{cases} I_L + I_{R_2} = I_1 \\ R\,I_L = 2R\,I_{R_2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_L = \frac{2R}{3R}\,I_1 = \frac{2}{3}\,I_1 = 6\,\mathrm{mA}$$

Appena riaperto l'interruttore l'energia magnetica viene dissipata dalle resistenze R_1 ed R_2, in parti proporzionali ai valori delle due resistenze, dato che la corrente è la stessa in ogni punto della maglia: dunque $W_1 = R_1 I^2$; $W_2 = R_2 I^2$.

Nella resistenza R_1 si dissipa quindi 1/3 dell'energia imagazzinata: dunque

$$U = \frac{1}{3}\,U_L = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,L\,I_L^2 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{6U}{I_L^2} = 6.67\,\mathrm{mH}$$

Quesito n. 3.

La tensione ai capi dell'induttanza, V_L, appena si apre il circuito, quando la corrente è I_L si determina dall'equazione di maglia

$$(2R+R_1)I_L - V_L = 0 \quad \Rightarrow \quad V_L = 3R\,I_L = 3\,(2.5\,\mathrm{k}\,\Omega)\,(6\,\mathrm{mA}) = 45\,\mathrm{V}$$

che è maggiore della f.e.m. del generatore.

Osservazione: Nel caso in esame, con $R_2 = 2R$, si ha che

$$V_L = (2R+R_1)\,I_L = (2R+R_1)\,\frac{2R}{2R+R_1}\,I_1 = 2R\,I_1$$

mentre si è visto che

$$\mathcal{E} = \frac{2R+3R_1}{2R+R_1}\,RI_1$$

La condizione su R_1 per cui sarà $V_L > \mathcal{E}$ all'apertura del circuito è data da

$$\frac{V_L}{\mathcal{E}} = \frac{2\,(2R+R_1)}{2R+3R_1} > 1 \quad \Rightarrow \quad R_1 < 2R$$

PROBLEMA n. 3 – Che caldo quest'estate!

100 Punti

Quesito n. 1.

Il flusso di energia che entra nell'appartamento, sotto forma di calore, per conduzione è dato da $\Phi_{\text{in}} = K\,(T_{\text{e}} - T)$. Il flusso di energia che il condizionatore estrae dall'appartamento è dato da $\Phi_{\text{out}} = \alpha\,\varepsilon\,P$ dove ε è l'efficienza di un frigorifero ideale (cioè di un frigorifero che utilizza il ciclo di Carnot). Dal momento che il condizionatore funziona tra due sorgenti, l'appartamento a temperatura T e l'ambiente esterno a temperatura T_{e}, l'efficienza di un frigorifero di Carnot che funziona tra le stesse sorgenti è data da $\varepsilon = T/(T_{\text{e}} - T)$ per cui, ricomponendo la relazione del flusso in uscita, si ha

$$\Phi_{\text{out}} = \alpha\,\frac{T}{T_{\text{e}} - T}\,P$$

Quesito n. 2.

In condizioni stazionarie, il flusso in ingresso è uguale al flusso in uscita. Dunque si ha

$$K\,(T_{\text{e}} - T) = \alpha\,\frac{T}{T_{\text{e}} - T}\,P$$

$$K\,T^2 - (2K\,T_{\text{e}} + \alpha\,P)\,T\ + K\,T_{\text{e}}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T^2 - (2T_{\text{e}} + \theta)\,T\ + T_{\text{e}}^2 = 0$$

con $T_{\text{e}} = 305\,\text{K}$ e avendo posto $\theta = \alpha\,P/K = 0.84\,\text{K}$.

$$T = \frac{2\,T_{\text{e}} + \theta \pm \sqrt{4\,T_{\text{e}}\,\theta + \theta^2}}{2}$$

Delle due radici, una sola è minore della temperatura esterna, per cui si ha $T = 289\,\text{K} = 16°\text{C}$.

Quesito n. 3.

Quando si spegne il condizionatore d'aria c'è soltanto il flusso di energia dall'esterno verso l'interno dell'appartamento. Si ha

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = K\,(T_{\text{e}} - T(t)) \quad \text{e} \quad \Delta Q = C\,\Delta T$$

Ad ogni intervallo di tempo Δt, si ha una variazione di temperatura data da

$$\Delta T = \beta\,(T_{\text{e}} - T)\,\Delta t \quad \text{avendo posto} \quad \beta = K/C\,.$$

Con questa espressione, partendo dal valore iniziale di $(T_{\text{e}} - T)$, si possono calcolare ΔT e T ogni 15 minuti, come mostrato nella seguente tabella.

Tempo t [min]	$T_{\text{e}} - T(t)$ [°C]	ΔT [°C]	$T(t)$ [°C]
0			18.0
15	14.0	3.4	21.4
30	10.6	2.6	24.0
45	8.0	1.9	25.9
60	6.1	1.5	27.4

La temperatura (approssimata) dell'appartamento dopo un'ora è di 27.4°C.

Quesito n. 4.

Si considerino due termini consecutivi della successione: $F_k = T_{\text{e}} - T(t_k)$ e il seguente $F_{k+1} = T_{\text{e}} - T(t_{k+1})$

Operando come sopra, si può scrivere che

$$T(t_{k+1}) - T(t_k) = \Delta T = \beta\,[T_{\text{e}} - T(t_k)]\,\Delta t$$

ovvero, sostituendo in termini di F_k e F_{k+1}

$$(T_{\text{e}} - F_{k+1}) - (T_{\text{e}} - F_k) = F_k - F_{k+1} = \beta\,F_k\,\Delta t \quad \Rightarrow \quad F_{k+1} = (1 - \beta\,\Delta t)\,F_k \quad \Rightarrow \quad \frac{F_{k+1}}{F_k} = 1 - \beta\,\Delta t$$

La successione F_k è quindi una progressione geometrica di ragione $(1-\beta\,\Delta t)$ per cui

$$F(t_k) = F(t_0)\ (1-\beta\,\Delta t)^k \quad \Rightarrow \quad T_\mathrm{e} - T(t_k) = (T_\mathrm{e} - T_0)\ (1-\beta\,\Delta t)^k$$

Quesito n. 5.

Si pone adesso $\Delta t = t/n$ e dopo n incrementi temporali, cioè al tempo t si ha

$$F(t_n) = T_\mathrm{e} - T(t_n) = (T_\mathrm{e} - T_0)\ \left(1 - \frac{\beta\,t}{n}\right)^n$$

Per $n \to \infty$ posto $x = -\dfrac{n}{\beta\,t}$ si ha che $x \to -\infty$, e ci si riconduce al *limite notevole* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Infatti

$$F(t) = T_\mathrm{e} - T(t) = \lim_{x\to-\infty}(T_\mathrm{e} - T_0)\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\beta t\,x} = (T_\mathrm{e} - T_0)\lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-\beta\,t} = (T_\mathrm{e} - T_0)\,e^{-\beta\,t}$$

Quesito n. 6.

Il tempo caratteristico del processo è dato dalla costante tempo $\tau = 1/\beta = C/K = 3.7\times 10^3\,\mathrm{s}$.

La temperatura dell'appartamento dopo un'ora (ovvero per $t = 3600\,\mathrm{s}$) risulta quindi

$$T(t) = T_\mathrm{e} - (T_\mathrm{e} - T_0)\,e^{-t/\tau} = 26.7°\mathrm{C}$$

PROBLEMA n. 4 – Una misura al volo. 50 Punti

Quesito n. 1.

Poiché il campo elettrico è uniforme, la forza che agisce su un elettrone (o su uno ione) è costante, di modulo pari a eE; inoltre il moto avviene nella direzione e nel verso del campo. In un generico istante $t < t_\mathrm{e}$ ciascun elettrone avrà percorso una distanza $v_\mathrm{e}t$. Ne segue che il lavoro fatto su un singolo elettrone, in funzione del tempo, risulta:

$$\mathcal{L}_e = eEv_\mathrm{e}t$$

Un'espressione analoga vale ovviamente per gli ioni.

Quesito n. 2.

Poiché il rivelatore può essere considerato come un condensatore isolato, l'energia occorrente per far migrare elettroni e ioni viene prelevata da quella immagazzinata nel condensatore. Potremo dunque scrivere:

$$\frac{1}{2}\,CV_0^2 = NeEv_\mathrm{i}t + NeEv_\mathrm{e}t + \frac{1}{2}CV_\mathrm{c}^2$$

Da qui:

$$\frac{1}{2}\,C(V_0^2 - V_\mathrm{c}^2) = NeE(v_\mathrm{i} + v_\mathrm{e})\,t$$

$$\frac{1}{2}\,C(V_0 + V_\mathrm{c})(V_0 - V_\mathrm{c}) = \frac{1}{2}\,C(V_0 + V_\mathrm{c})\,V(t) = Ne\frac{V_\mathrm{c}}{d}(v_\mathrm{i} + v_\mathrm{e})\,t$$

Poiché il segnale $V(t)$ è molto minore di V_0, potremo porre, con buona approssimazione, $V_\mathrm{c} = V_0$ nell'espressione precedente, ottenendo infine:

$$V(t) = \frac{Ne}{Cd}(v_\mathrm{i} + v_\mathrm{e})\,t$$

Quesito n. 3.

Nell'istante $t_e = x/v_e$ gli elettroni raggiungono l'anodo, e da quel momento in poi non assorbono più energia. Il segnale V cresce ancora, ma contribuiscono solamente gli ioni:

$$V(t) = \frac{Ne}{Cd}(v_i\, t + x)$$

Quesito n. 4.

All'istante $t_i = (d - x)/v_i$ gli ioni raggiungono il catodo. A quel punto il segnale diventa:

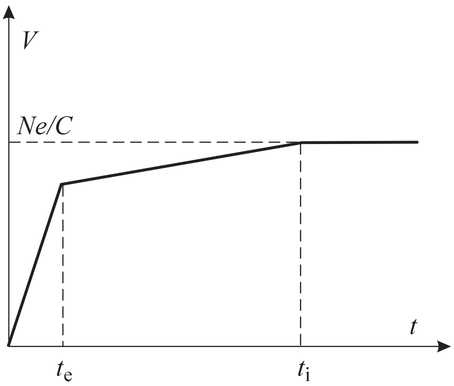
$$V(t) = \frac{Ne}{Cd}(d - x + x) = \frac{Ne}{C}$$

Come si può vedere, il valore finale dipende solamente dalla capacità del condensatore e dal numero di coppie elettroni–ioni prodotte dal passaggio della particella ionizzante.

Si noti che a questo risultato si può arrivare molto facilmente osservando che, dopo che tutta la carica "prodotta" dalla ionizzazione, è stata raccolta, la carica sulle armature diminuisce di una quantità Ne, e il potenziale V_0 diminuisce di una quantità Ne/C.

Quesito n. 5.

Il grafico qualitativo del segnale raccolto dal rivelatore risulta allora:



Materiale prodotto dal gruppo

PROGETTO OLIMPIADI
Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica
presso Liceo Scientifico "U. Morin"
VENEZIA MESTRE
fax: 041.584.1272
e-mail: olifis@libero.it